Plagiarism Checker X Originality Report

Similarity Found: 12%

Date: Thursday, January 26, 2023
Statistics: 652 words Plagiarized / 5398 Total words
Remarks: Low Plagiarism Detected - Your Document needs Optional Improvement.

Limits: Journal of Mathematics and Its Applications E-ISSN: 2579-8936 P-ISSN: 1829-605X Vol. 19, No. 1, Mei 2022, 123-133 DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v1 9 i 1 . 8114 Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya Haryadi 1 , Burhanudin Arif Nurnugroho 2 1 Departemen Ilmu Komputer; Universitas Muhammadiyah Palangkaraya Indonesia 2 Departemen Pendidikan Matematika; Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta Indonesia e-mail: 1 haryadi_ump@yahoo.co.id, 2 burhanudin@pmat.uad.ac.id Diajukan: 3 Desember 2020, Diperbaiki: 27 September 2021, Diterima: 12 Januari 2022 Abstrak Di dalam makalah ini akan dikaji sifat-sifat ruang barisan Orlicz l ???? .

Selanjutnya, akan diselidiki karakteristik ruang dual ruang barisan Orlicz dan keterkaitannya dengan ruang barisan yang dibangun oleh pasangan fungsi Orlicz komplementernya. Untuk mencapai tujuan tersebut pada ruang barisan Orlicz l ???? akan digunakan norma Luxemburg dan norma- ???? . Dengan menggunakan kedua norma, karakterisasi ruang barisan Orlicz berhasil ditelaah. Hasil-hasil yang lebih khusus ditelaah untuk fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi- ? 2 . Secara umum, ruang dual ruang barisan Orlicz merupakan himpuan bagian ruang barisan yang dibangun oleh pasangan fungsi Orlicz komplementernya.

Lebih lanjut, u ntuk fungsi O rlicz yang memenuhi kondisi- ? 2 , ruang dual ruang barisan Orlicz merupakan perumuman di ruang barisan ???? ???? dengan 1 < ???? < 8 . Kata Kunci: fungsi Orlicz, ruang barisan, ruang dual. Abstract In this paper first, we examine some properties of the sequence Orlicz space l ???? . Then, we examined the characteristics of the dual space of the sequence space. The relation of the dual space and the sequence generated by its complementary Orlicz function are examined. We use the Luxemburg norm and the ???? - norm to investigate the space .

Some properties of the space are fo und, and the results for the Orlicz function that satisfies ???? 2 -condition are given. Generally, the dual space is the subspace of the sequence generated by its complementary Orlicz function. For the Orlicz function that satisfies ???? 2 -condition, the dual space is generalization of the dual in the space ???? ???? for 1 < ???? < 8 . Keywords: dual space, Orlicz function, sequence space,. 1 Pendahuluan Generalisasi ruang barisan l ???? , 1 < ???? < 8 ke ruang barisan Orlicz selain telah mendorong dilakukan berbagai cara pengkonstruksian juga telah mendorong berbagai topik penelitian lainnta pada ruang barisan Orlicz.

Beberapa cara pengkonstruksian ruang barisan dengan menggunakan fungsi Orlicz dikaji di dalam [1], [2], [3] dan [4]. Di dalam [5], Khusnussa'adah dan Supama meneliti sifat kelengkapan modular dan kelengkapan norma pada ruang barisan Orlicz . Untuk 1 < p < 8 telah diketahui bahwa ruang dual l ???? , 1 < ???? < 8 adalah l ???? dengan 1 ???? + 1 ???? = 1. Pengkarakterisasian dual Kothe-Toeplitz pada ruang barisan yang dibangkitkan oleh fungsi 124 Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya Orlicz dikaji di dalam [1], [6], [7] dan [8].

Bentuk umum fungsional linear pada ruang barisan Orlicz ditelaah beberapa peneliti. Di dalam [9], Nowak mengkarakterisasi dual Kothe -Toeplitz pada ruang barisan yang dibangun oleh fungsi Orlicz dengan menghilangkan kondisi kekonveksan dan menggunakan pendekatan fungsional Minkowski untuk mengkontruksi norma. Di dalam makalah ini akan dikaji sifat-sifat ruang barisan Orlicz dan karakterisasi ruang dualnya. Lebih lanjut, akan dikaji hubungan antara dual ruang barisan Orlcz dengan ruang barisan yang dikonstruksi oleh fungsi Orlicz komplementernya. 2.

Metode Penelitian Di dalam makalah ini fungsi Orlicz yang digunakan untuk membentuk barisan Orlicz merupakan fungsi konveks. Untuk menelaah sifat -sifat ruang barisan Orlicz, terl ebih dahulu akan dikaji materi-materi dasar mengenai fungsi Orlicz. P ada ruang barisan Orlicz terlebih dahulu dikonstruksi modular untuk mengkonstruksi norma Luxemburg. Agar pembahasan dapat dilakukan lebih leluasa , pada ruang barisan Orlicz juga dikonstru ksi norma- ???? . Dengan menggunakan kedua norma tersebut, selanjutnya dikaji sifat-sifat ruang barisan Orlicz.

Sifat-sifat pada ruang barisan Orlicz yang telah diperoleh pada tahapan sebelumnya, selanjutnya digunakan untuk mengkaji ruang dual ruang barisan Orlicz dan keterkaitan dengan ruang barisan Orlicz yang dibangun oleh pasangan fungsi Orlicz kompelementernya. Secara lebih khusus dikaji sifat ruang barisan Orlicz dan karakterisasi ruang dualnya untuk fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi - ? 2 . 3. Hasil dan Pembahasan Uraian mengenai fungsi Orlicz berikut dapat diacu di dalam [10] . Fungsi Orlicz dituliskan dengan ???? , yaitu ???? : R ? [0, 8), dengan ???? fungsi genap, kontinu, konveks, ???? (????) = 0 jika dan hanya jika ???? = 0 dan ???????? ???? ???? ? 8 ???? (????) = 8 .

Setiap fungsi Orlicz ???? dapat dinyatakan dengan ???? (????) = ? ???? (????) ???????? ???? 0 (1) dengan ???? fungsi tidak turun dan kontinu kanan. Untuk sebarang fungsi Orlicz ???? , fungsi ???? dengan definisi ???? (????) = ???????? {| ???? | ???? - ???? (????): ???? = 0} merupakan fungsi Orlicz. Selanjutnya ???? dan ???? dinamakan pasangan fungsi Orlicz komplementer. Jika ???? dan ???? pasangan fungsi Orlicz komplementer maka berlaku ketaksamaan Young, yakni | ???? ???? | = ???? (????) + ???? (????) untuk setiap ???? , ???? ? R .

Ketaksamaan Young menjadi kesamaan jika ???? = ???? (| ???? |) atau ???? = ???? (| ???? |) dengan ???? (atau ????) fungsi tidak turun dan kontinu kanan yang memenuhi persamaan (1) ? (t) = ? p(s)ds t 0 (1. 125 Haryadi, Burhanudin Arif Nurnugroho Fungsi Orlicz ???? dikatakan memenuhi kondisi- ? 2 jika terdapat konstanta ???? dan bilangan ???? = 0 sehingga ???? (2 ????) = ???????? (????) untuk setiap ???? = ???? . Kondisi- ? 2 juga ekuivalen dengan terdapat bilangan ???? (????) > 0 sehingga ???? (????????) = ???? (????) ???? (????) dengan ???? > 1.

Perlu diketahui bahwa jika fungsi Orlicz ???? memenuhi kondisi - ? 2 maka fungsi Orlicz komplementernya belum tentu memenuhi kondisi- ? 2 . Contoh 1. (i) Fungsi ???? 1 dengan ???? 1 (????) = | ???? | ???? (|ln | ???? || + 1) dengan ???? > 1 merupakan fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi - ? 2 (ii) Fungsi ???? 2 dengan ???? 2 (????) = ???? | ???? | - 1 merupakan fungsi Orlicz yang tidak memenuhi kondisi - ? 2 , sebab ???? 2 (2 ????) = ???? | 2 ???? | - 1 = ? ???? | ???? | + 1 ? ? ???? | ???? | - 1 ? = ? ???? | ???? | + 1 ? ???? 2 (????), yang berakibat untuk sebarang ???? > 0 dapat diambil ???? = 0 dengan ???? < ???? | ???? | + 1, sehingga ???? ???? 2 (????) < ? ???? | ???? | + 1 ? ???? 2 (????) = ???? 2 (2 ????). 3.1. Beberapa sifat ruang barisan Orlicz Diberikan himpunan semua barisan bilangan real ???? .

Anggota ???? dituliskan dengan ???? = (???? ????) = (???? 1 , ???? 2 , ?). Untuk sebarang fungsi Orlicz ???? dapat ditunjukkan bahwa l ???? = ? (???? ????): ? ???? ? ???? ???? ???? ? < 8 , ???????????????? ???? ???? ???? ???? ???? > 0 8 ???? = 1 ? merupakan ruang barisan dan selanjutnya dinamakan ruang barisan Orlicz. Salah satu himpunan bagian l ???? adalah himpunan barisan l ???? 0 = ? (???? ????): ? ???? (???? ????) < 8 8 ???? = 1 ? .

Untuk fungsi Orlicz ???? (????) = | ???? | ???? , 1 < ???? < 8 , maka ruang barisan Orlicznya adalah l ???? = {(???? ????): ? | ???? ???? | ???? < 8 ???? }. Lemma 1 Jika fungsi Orlicz ???? tidak memenuhi kondisi- ? 2 maka l ???? 0 bukan ruang linear. Lebih lanjut, l

???? 0 himpunan bagian sejati l ???? . Bukti. Karena ???? tidak memenuhi kondisi- ? 2 , maka untuk setiap bilangan asli ???? terdapat bilangan ???? ???? sehingga ???? (2 ???? ????) > 2 ???? ???? (???? ????). Dibentuk barisan (???? ????) dengan ???? ???? = ? ???? ???? , ???? ???? 1 2 ???? < ???? (???? ????) = 1 2 ???? - 1 0, ??????????????????? ???? ???????? ???? ???? ???? ???????????? Barisan (???? ????) ? l ???? 0 , sebab 126 Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya ? ???? (???? ????) = 8 ???? = 1 ? 1 2 ???? - 1 8 ???? = 1 < 8 . Sementara itu barisan (2 ???? ????) bukan anggota l ???? 0 , sebab ? ???? (2 ???? ????) > 8 ???? = 1 ? 2 ???? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 = 8 .

Jelas bahwa (2 ???? ????) ? l ???? , sebab l ???? ruang linear. Dengan demikian lemma terbukti. Fungsi Orlicz bersifat konveks, oleh karena itu fungsi ???? ???? : l ???? ? [0, 8] dengan definisi ???? ???? (????) = ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 , ???? = (???? ????) ? l ???? merupakan modular konveks, yakni (1) ???? ???? (????) = 0, jika dan hanya jika ???? = ???? , dengan ???? = (0,0, ...

) , (2) ???? ???? (- ????) = ???? ???? (????) untuk setiap ???? ? l ???? , dan (3) ???? ???? (???????? + ????????) = ???? ???? ???? (????) + ???? ???? ???? (????) untuk setiap ???? , ???? ? l ???? dan a , ß = 0 dengan a + ß = 1. Sifat konveks dan ???? (0) = 0 mengakibatkan ???? naik monoton pada interval [0, 8). Oleh karena itu ???? ???? bersifat naik monoton pada interval [0, 8). Selanjutnya, karena ???? ???? merupakan modular konveks, maka dapat didefinisikan norma Luxemburg pada l ???? , yaitu ? (???? ????) ? (????) = ???????? ? ???? : > 0: ???? ???? ? (???? ????) ???? ? = 1 ? .

Berdasarkan definisi norma Luxemburg dan sifat monoton naik ???? ???? , untuk sebarang ???? > 0 berlaku ???? ???? ? (???? ????) ? (???? ????) ? (????) + ???? ? = 1. Oleh karena itu diperoleh hasil ???? ???? ? (???? ????) ? (???? ????) ? (????) ? = 1 (2) Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ???? dan ???? . Selain norma Luxemburg, pada ruang l ???? juga bisa didefinisikan norma- ???? ? (???? ????) ? ???? = sup ? ???? (???? ????) = 1 8 ???? = 1 ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? , (???? ????) ? l ???? Di dalam ruang l ???? , 1 < ???? < 8 hubungan antara norma- ???? dengan norma- ???? , 127 Haryadi, Burhanudin Arif Nurnugroho ? (???? ????) ? ???? = ? ? | ???? ???? | ???? 8 ???? = 1 ? 1 / ???? diilustrasikan di dalam contoh berikut. Contoh 2.

Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ???? (????) = | ???? | 2 2 dan ???? (????) = | ???? | 2 2 . Misalkan ???? = (???? ????) ? l ???? dengan ? ???? ? 2 = (? | ???? ???? | 2 8 ???? = 1) 1 / 2 =1. Untuk ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 = ? | ???? ???? | 2 2 8 ???? = 1 = 1 ketaksamaan Holder memberikan ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? = ? ? | ???? ???? | 2 8 ???? = 1 ? 1 2 ? ? | ???? ???? | 2 8 ???? = 1 ? 1 2 = v 2 ? ? | ???? ???? | 2 2 8 ???? = 1 ? 1 2 = v 2 sehingga berakibat itu ? ???? ? ???? = v 2 . Selanjutnya didefinisikan barisan (???? ????) dengan ???? ???? = v 2 | ???? ???? | ???????????? (???? ????).

Karena ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 = ? | ???? ???? | 2 2 8 ???? = 1 = ? ? v 2 | ???? ???? | ???????? (???? ????) ? 2 2 8 ???? = 1 = ? | ???? ???? | 2 8 ???? = 1 = 1, maka ? ???? ? ???? = ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? = ? ? ???? ???? v 2 | ???? ???? | ???????????? (???? ????) 8 ???? = 1 ? = v 2 ? | ???? ???? | 2 = v 2 8 ???? = 1 . Dengan demikian diperoleh ? ???? ? ???? = v 2 . Selanjutnya, untuk sebarang ???? = (???? ????) ? l ???? dengan ???? ? 0, mengingat ? ???? ? ???? ? 2 ? 2 = 1, dengan menggunakan hasil terakhir ? ???? ? ???? ? 2 ? ???? = v 2 . Oleh karena itu ? ???? ? ???? = v 2 ? ???? ? 2 .

Lemma 2 Diberikan barisan (???? ????) ? l ???? . (i) Jika ? (???? ????) ? ???? = 1 maka ???? ???? ? (???? ????) ? = ? (???? ????) ? ???? , (ii) Jika ? (???? ????) ? ???? > 1 maka ???? ???? ? (???? ????) ? = ? (???? ????) ? ???? . Bukti. (i) Karena ? (???? ????) ? ???? = 1, kekonveksan ???? berakibat 1 ? (???? ????) ? ???? ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 = ? ???? ? ???? ???? ? (???? ????) ? ???? ? 8 ???? = 1 = 1. Oleh karena itu ???? ???? ? (???? ????) ? = ? (???? ????) ? ???? . (ii) Untuk ? (???? ????) ? ???? > 1 diambil sebarang bilangan ???? > 0 sehingga ? (???? ????) ? - ???? = 1.

Karena ? (???? ????) ? - ???? < ? (???? ????) ? , maka berdasarkan definisi norma Luxemburg 1 < ???? ???? ? (???? ????) ? (???? ????) ? - ???? ? = ? ???? ? ???? ???? ? (???? ????) ? - ???? ? 8 ???? = 1 = 1 ? (???? ????) ? - ???? ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 , sehingga lemma terbukti. 128 Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya Lemma 3 Untuk sebarang ???? = (???? ????) ? l ???? berlaku ? (???? ????) ? ???? = ???? ???? ? (???? ????) ? + 1. Bukti. Karena | ???? ???? ???? ???? | = ???? (???? ????) + ???? (???? ????) untuk setiap bilangan asli ???? , maka ? (???? ????) ? ???? = sup ? ???? (???? ????) = 1 8 ???? = 1 ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? = ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 + sup ? ???? (???? ????) = 1 8 ???? = 1 ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 = ???? ???? ? (???? ????) ? + 1. Di dalam teorema berikut dinyatakan bahwa norma Luxemburg dan norma- ???? ekuivalen.

Teorema 4 Untuk setiap barisan (???? ????) ? l ???? , berlaku ? (???? ????) ? (????) = ? (???? ????) ? ???? = 2 ? (???? ????) ? (????) . Bukti. Diambil sebarang ???? = (???? ????) ? l ???? dengan ???? ? ???? . Karena ? (???? ????) ? (???? ????) ? ???? ? ???? = 1, maka berdasarkan Lemma 2(i), ???? ???? ? (???? ????) ? (???? ????) ? ???? ? = 1. Oleh karena itu ? (???? ????) ? (????) = ???????? ? ???? > 0: ???? ???? ? (???? ????) ???? ? = 1 ? = ? (???? ????) ? ???? , Sehingga ketaksamaan pertama terbukti.

Selanjutnya dengan menerapkan berturut-turut Lemma 3 dan ketaksamaan ? ? ? (x k) ? (x k) ? (?) ? = 1 (2), ? (???? ????) ? (???? ????) ? (????) ? ???? = ???? ???? ? (???? ????) ? (???? ????) ? (????) ? + 1 = 2, sehingga ketaksamaan kedua terbukti. Teorema 5 [Ketaksamaan Holder] Jika ???? dan ???? pasangan fungsi Orlicz komplementer, maka untuk setiap ???? = (???? ????) ? l ???? dan ???? = (???? ????) ? l ???? berlaku ? ? ????

???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? = ? ???? ? ???? ? ???? ? ???? . Bukti.

Diasumsikan (???? ????) ? ???? dan (???? ????) ? ???? . Karena ? (???? ????) ? ???? ? ???? ? ???? = 1, maka berdasarkan Lemma 2 (i), ???? ???? ? (???? ????) ? ???? ? ???? ? = 1. Oleh karena itu ? ? ???? ???? 8 ???? = 1 ???? ???? ? ???? ? ???? ? = sup ? ???? (???? ????) = 1 8 ???? = 1 ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? = ? ???? ? ???? sehingga ketaksamaan tersebut terbukti. Lemma 6 Jika l ???? 1 ? l ???? 2 maka ada konstanta ???? dan ???? 0 = 0 sehingga ???? 2 (????) = ???????? 1 (????) untuk setiap ???? = ???? 0 . Bukti. Diandaikan pernyataan tersebut tidak benar.

Jadi untuk setiap bilangan asli ???? dan ???? ???? > 0 dapat dipilih bilangan ???? ???? = ???? ???? sehingga 129 Haryadi, Burhanudin Arif Nurnugroho ???? 2 (???? ????) > 2 ???? ???? 1 (???? ????). Dibentuk barisan (???? ????) dengan ???? ???? = ???? ???? jika 2 - ???? = ???? 1 (???? ????) < 2 - ???? + 1 dan ???? ???? = 0 untuk nilai ???? ???? lainnya. Barisan (???? ????) ? l ???? 1 sebab ? ???? 1 (???? ????) = ? 2 - ???? + 1 8 ???? = 1 < 8 .

8 ???? = 1 Sementara itu ? ???? 2 (???? ????) 8 ???? = 1 = ? 2 ???? ???? 1 (???? ????) 8 ???? = 1 = ? 2 ???? 2 - ???? = 8 , 8 ???? = 1 yakni (???? ????) ? l ???? 2 . Dengan demikian tidak benar bahwa l ???? 1 ? l ???? 2 , kontradiksi dengan yang diketahui. Teorema 7 Ruang barisan Orlicz l ???? = l ???? 0 jika dan hanya jika ???? memenuhi kondisi- ? 2 . Bukti. Diketahui ???? memenuhi kondisi- ? 2 . Karena l ???? 0 ? l ???? maka cukup dibuktikan bahwa l ???? ? l ???? 0 . Diambil sebarang (???? ????) ? l ???? , jadi terdapat ???? > 0 sehingga ? ???? ? ???? ???? ???? ? < 8 8 ???? = 1 .

Jika ???? = 1, sifat monoton naik ???? mengakibatkan ? ???? (???? ????) 8 ???? = 1 = ? ???? ? ???? ???? ???? ? 8 ???? = 1 yang berarti (???? ????) ? l ???? 0 . Jika ???? > 1 diambil bilangan ???? > 0 sehingga ???? (????????) = ???? (????) ???? (????). Diperoleh ? ???? (???? ????) = ? ???? ? ???????? ???? ???? ? 8 ???? = 1 = 8 ???? = 1 ???? (????) ? ???? ? ???? ???? ???? ? 8 ???? = 1 < 8 . Dengan demikian l ???? ? l ???? 0 . Sebaliknya, diketahui l ???? = l ???? 0 . Diambil sebarang ???? = (???? ????) ? l ???? 0 . Karena l ???? 0 ruang linear, maka 2 ???? ? l ???? 0 .

Didefinisikan fungsi Orlicz ???? 1 dengan ???? 1 (????) = ???? (2 ????). Karena ???? (????) = ???? 1 (????) maka l ???? 1 ? l ???? , sehingga berdasarkan Lemma 6, terdapat bilangan ???? > 0 sehingga ???? (2 ????) = ???? 1 (????) = ???????? (????), yang berarti ???? memenuhi kondisi- ? 2 . Teorema 8 Ruang l ???? merupakan ruang normal. Bukti. Diambil sebarang (???? ????) ? l ???? , yakni ? ???? ? ???? ???? ???? ? < 8 8 ???? = 1 untuk suatu ???? > 0.

Diambil barisan (???? ????) sehingga | ???? ???? | < | ???? ???? |, ???? = 1,2,3, ? . Sifat monoton tidak turun fungsi ???? mengakibatkan ? ???? ? ???? ???? ???? ? = ? ???? ? ???? ???? ???? ? < 8 8 ???? = 1 8 ???? = 1 , yang berarti (???? ????) ? l ???? . Oleh karena itu l ???? merupakan ruang normal. 3.2. Ruang dual l ???? Selanjunya akan dikaji ruang dual ruang barisan Orlicz. Notasi l ???? ' menyatakan ruang linear yang anggotanya semua fungsional linear kontinu pada l ???? .

Untuk pembahasan selanjutnya didefinisikan norma ? · ? pada l ???? ' dengan 130 Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya ? ???? ? = sup ? ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? : ? ???? ? ???? = 1 ? , untuk setiap ???? ? l ???? ' Teorema 9 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ???? dan ???? . Jika (???? ????) ? l ???? maka fungsi ???? ???? dengan ???? ???? (????) = ? ???? ???? ???? ???? , untuk setiap (???? ????) ? l ???? 8 ???? = 1 merupakan fungsional linear pada l ???? . Lebih lanjut ? ???? ???? ? = ? ???? ? ???? = 2 ? ???? ???? ? (3) Bukti. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa ???? ???? merupakan fungsional linear kontinu.

Diambil sebarang ???? = (???? ????), ???? = (???? ????) ? l ???? dan sebarang bilangan real ???? . Karena ???? ? l ???? dan ???? ? l ???? maka ? ???? ???? (????) ? = ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? = ? ???? (???? ????) + ? ???? (???? ????) < 8 , 8 ???? = 1 8 ???? = 1 yakni ???? ???? terbatas. Linieritas ???? ???? diperoleh dari ???? ???? (????????) = ? (???????? ????) ???? ???? = ???? ???? ???? (????) 8 ???? = 1 dan ???? ???? (???? + ????) = ? (???? ???? + ???? ????) ???? ???? = ???? ???? (????) + ???? ???? (????) 8 ???? = 1 . Ketaksamaan pertama didalam (3) diperoleh dengan menerapkan ketaksamaan Holder . Selanjutnya, karena ? ???? ? ???? = ???? ???? (????) + 1, maka ? ???? : ???? ???? (????) = 1 ? ? ? ???? : ? ???? ? ???? = 2 ? .

Oleh karena itu ? ???? ? ???? = ???????? ? ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? : ???? ???? (????) = 1 ? = ???????? ? ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? : ? ???? ? ???? = 2 ? = ? ???? ? ???? ? ???? ???? ? = 2 ? ???? ???? ? . Oleh karena ketaksamaan kedua didalam (3) terbukti. Contoh 3. Diberikan fungsi Orlicz ???? (????) = | ???? | 2 2 . Fungsi ???? dengan ???? (????) = | ???? | 2 2 merupakan fungsi Orlicz komplementer ???? . Berdasarkan Contoh 2, ? ???? ? ???? = v 2 ? ???? ? 2 . Lebih lanjut, ? ???? ???? ? = sup ? ? ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ? : ? ???? ? ???? = 1 ? = sup ? ? ???? ? ???? ? ???? ? ???? : ? ???? ? ???? = 1 ? = ? ???? ? ???? = v 2 ? ???? ? 2 .

Oleh karena itu ? ???? ???? ? = 2 ? ???? ? 2 . Dual- ???? dan dual- ???? ruang barisan l ???? dituliskan berturut-turut l ???? ???? dan l ???? ???? , yaitu l ???? ???? = ? (???? ????) ? ???? : ? | ???? ???? ???? ???? | < 8 ???????????????? ???? ???????? (???? ????) ? l ???? 8 ???? = 1 ? l ???? ???? = ? (???? ????) ? ???? : ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 ???? ???? ???? ???? ???????? ???????????????? ???? ???? ???????? (???? ????) ? l ???? ? 131 Haryadi, Burhanudin Arif Nurnugroho Teorema-teorema berikut merupakan hasil kajian mengenai dual- ???? dan dual- ???? ruang barisan l ???? , yang merupakan generalisasi dual- ???? dan dual- ???? ruang barisan l ???? , 1 < ???? < 8 . Teorema 10 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ???? dan ???? .

Jika fungsi Orlicz ???? tidak memenuhi kondisi- ? 2 , maka l ???? ? l ???? ???? . Bukti. Diketahui ???? tidak memenuhi kondisi - ? 2 . Berdasarkan Lemma 1 ada barisan ???? = (???? ????) ? l ???? \ l ???? 0 , yakni ? ???? (???? ????) = 8 8 ???? = 1 dan ? ???? ? ???? ???? ???? ? < 8 8 ???? = 1 untuk suatu ???? > 1. Didefinisikan funsional linear ???? dengan ???? (????) = 1 dan ???? (????) = 0 jika ???? ? l ???? 0 .

Berdasarkan Teorema Hahn -Banach, fungsional ???? dapat diperluas pada l ???? , yaitu ???? (????) = ? 1, ???? ???? ???? ? l ???? \ l ???? 0 0, ???? ???? ???? ? l ???? 0 . Dimisalkan ???? dapat dinyatakan dalam bentuk ???? (????) = ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 untuk suatu ???? = (???? ????) ? l ???? . Didefinisikan barisan ???? [????] = (???? 1 , ???? 2 , ? , ???? ???? , 0,0, ?) . Karena ???? [????] ? l ???? 0 maka ???? ? ???? [????] ? = 0 untuk setiap ???? = 1,2, ? , yakni 0 = ? ???? ???? [????] ???? ???? 8 ???? = 1 = ? ???? ???? 2 , ???? = 1,2, ? . ???? ???? = 1 Oleh karena itu ???? ???? = 0 untuk setiap ???? = 1,2, ? .

Akibatnya ???? (????) = ? ???? ???? ???? ???? 8 ???? = 1 = 0 untuk setiap ???? ? l ???? \ l ???? 0 . Hal tersebut kontradiksi dengan kenyataan bahwa ???? (????) = 1. Teorema 11 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ???? dan ???? . Jika ???? memenuhi kondisi - ? 2 maka l ???? ???? = l ???? . Bukti. Diberikan (???? ????) ? l ???? , yakni sehingga ? ???? (???? ???? /????) < 8 8 ???? = 1 untuk suatu ???? > 0. Diambil sebarang (???? ????) ? l ???? . Kondisi - ? 2 mengakibatkan ? ???? (???? ????) < 8 . 8 ???? = 1 Akibatnya 1 ???? ? | ???? ???? ???? ???? | = ? ???? (???? ????) + ? ???? (???? ???? /????) < 8 .

8 ???? = 1 8 ???? = 1 8 ???? = 1 Oleh karena itu ? | ???? ???? ???? ???? | < 8 8 ???? = 1 , yang berarti (???? ????) ? l ???? ???? . Sebaliknya, diambil sebarang (???? ????) ? l ???? ???? dan sebarang bilangan asli ???? . Didefinisikan barisan (???? ????) dengan ???? ???? = ???? (| ???? ???? |) untuk setiap 1 = ???? = ???? dan ???? ???? = 0 untuk ???? > ???? . Barisan (???? ????) ? l ???? , sehingga berakibat ? | ???? ???? ???? ???? | 8 ???? = 1 < 8 . Dengan mengenakan kesamaan Young 132 Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya ? ???? (???? ????) + ? ???? (???? ????) ???? ???? = 1 ???? ???? = 1 = ? | ???? ???? ???? ???? | ???? ???? = 1 , yang berakibat ? ???? (???? ????) ???? ???? = 1 < 8 , yakni (???? ????) ? l ???? . Teorema 12 Diberikan pasangan fungsi Orlicz komplementer ???? dan ???? . Jika ???? memenuhi kondisi - ? 2 maka l ???? ???? = l ???? . Bukti. Karena l ???? ruang norma l, maka l ???? ???? = l ???? ???? .

Selanjutnya karena ???? memenuhi kondisi - ? 2 , maka berdasarkan Teorema 11, l ????

???? = l ???? . Oleh karena itu diperoleh l ???? ???? = l ???? . 4 Simpulan Berdasarkan hasil di atas, dapat disimpulkan hal-hal berikut: (i) Secara umum untuk sebabarang pasangan fungsi Orlicz komplementer ???? dan ???? , berlaku l ???? ? l ???? ' . (ii) Untuk fungsi Orlicz yang memenuhi kondisi - ? 2 , dual Kothe-Toeplitz ruang barisan Orlicz merupakan generalisasi dual Kothe-Toeplitz ruang barisan l ???? , dengan 1 < ???? < 8 .

(iii) Setelah ruang dual diketahui, kemungkinan selanjutnya yang dapat ditel iti adalah karakterisasi matriks tak hingga yang memetakan ruang barisan Orlicz ke ruang barisan lainnya. 5 Ucapan Terima Kasih Ucapan terima kasih disampaikan kepada reviewer yang telah memeriksa artikel ini sehingga sangat bermanfaat untuk perbaikan. 6 Daftar Pustaka [1] K.P. Rahman dan R.A.B.M. Karim, "Weighted Cesaro sequence space and related matrix tranformation," Pure and Applied Mathematics Journal, pp. 237-241, 2015. [2] V.K. Bhardwaj dan S. Gupta, "Cesaro summable difference sequence space," Journal of Inequalities and Applications.

[3] I. Bala, "On Cesaro Sequence Space defined by an Orlicz Function," Communications in Mathematics and Applications, vol. 3, no. 2, pp. 197-204, 2012. 133 Haryadi, Burhanudin Arif Nurnugroho [4] H. Dutta, I.H. Jebril, B.S. Reddy, dan S. Ravikumar, "A Generalization of Modular Sequence Spaces by Cesaro Mean of Order One," Revista Notas de Matematica, vol. 7, no. 1, pp. 1- 13, 2011. [5] N. Khusnussa'adah dan Supama, "Kelengkapan Ruang Barisan yang terdefinisi oleh Fungsi Orlicz," Eksakta: Jurnal Ilmu-ilmu MIPA, vol. 19, no. 1, pp. 1-14, 2019. [6] Haryadi, Supama dan A.

Zulijanto, "The The beta - dual of the Cessaro sequence spaces defined on a generalized Orlicz space," in IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 893, Denpasar, 2017. [7] K. Raj, R. Anand, R. dan S. Pandoh, "Cesaro O rlicz Sequence Space and Their Kothe - Toeplitz Duals," Math. J. Okayama Univ., vol. 61, pp. 141-158, 2019. [8] N. Subramanian, S. Krishnamoorthy dan S. Balasubramanian, "The Matrix Transformation on Orlicz Space of X," Acta Universitatis Apulensis, vol. 32, pp. 7-15, 2012. [9] M. Nowak, "Linear Functional on Orlicz Sequences Spaces without Local Convexity," Internat, J. Math. & Math. Sci, vol. 15, no.

2, pp. 241-254, 1992. [10] M.A. Krasnosel'skii dan Y.B. Rutickii, Covex Function and Orlicz Space, Netherlands: P. Noordhoff Ltd., 1961.

INTERNET SOURCES:

<1% - https://iptek.its.ac.id/index.php/limits/article/download/13128/6748
<1% - https://garuda.kemdikbud.go.id/documents/detail/2737510
11% - https://iptek.its.ac.id/index.php/limits/article/download/8114/6734

5% - https://iptek.its.ac.id/index.php/limits/article/view/8114
<1% -
https://garuda.kemdikbud.go.id/author/view/2388991?jid=12236&jname=Limits:%20Jo
urnal%20of%20Mathematics%20and%20Its%20Applications
<1% -
http://download.garuda.kemdikbud.go.id/article.php?article=492240&val=10053&title=
Some%20sequence%20spaces%20on%20the%20Orlicz%20space
<1% - https://id.wikipedia.org/wiki/Fungsi_(matematika)
<1% -
https://repository.ung.ac.id/get/kms/17509/Resmawan-Aljabar-Linear-Basis-ortonormal-
proses-Gram-Schmidt-Metode-Kuadrat-Terkecil.pdf
<1% -
https://repository.unikom.ac.id/38034/1/Modul%20LOGMAT%20Bab%205%20Kuantor%
20dan%20Logika%20Predikat%20-a4.docx
<1% -
https://roboguru.ruangguru.com/question/perhatikan-pernyataan-berikut-untuk-setiap-
bilangan-asli-dengan-menggunakan-induksi-matematika-dapat_qDpj1Z1KrIU
<1% - https://www.ruangguru.com/blog/logika-matematika
<1% - https://id.scribd.com/doc/86450155/Bab-II-Analisis-Real
<1% - https://repository.unair.ac.id/25596/13/13.%20bab%202.pdf
<1% - http://eprints.uny.ac.id/29669/1/A%20-%204.pdf
<1% - https://garuda.kemdikbud.go.id/author/view/3415729
<1% -
http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/196304201989032-ENC
UM_SUMIATY/FILE_5._MAKALAH_RUANG_BARISAN_MUSIELAK.pdf
<1% -
https://www.studocu.com/id/document/institut-teknologi-sepuluh-nopember/matriks/c
atatan-1-matriks/44643728
<1% -
https://roboguru.ruangguru.com/question/sbmptn-2021-saintek-mtk-ipa-gel-1-10-dibe
rikan-fungsi-dengan-untuk_QU-08FOALFP
<1% -
http://eprints.umpo.ac.id/6443/1/5.%20JURNAL%20Faktor-faktor%20Kesulitan%20Belaja
r%20Siswa%20MIN%20Janti.pdf
<1% -
https://www.researchgate.net/publication/361086647_On_A_l_-almost_null_and_A_l_-alm
ost_convergent_paranormed_Orlicz_sequence_spaces/fulltext/637f17ae37878b3e87d8ac
3d/On-A-l-almost-null-and-A-l-almost-convergent-paranormed-Orlicz-sequence-space
s.pdf
<1% - https://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou/mjou61/_08_Raj.pdf

<1% -
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/AUA/pdf/31_36_paper1-acta32-12.pdf