Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.16 No.2 (Desember 2022) Hal. 93-100

MATRIKS TRANSFORMASI PADA RUANG BARISAN ORLICZ

Haryadi[1]

[1]*Prodi Ilmu Komputer, Universitas Muhammadiyah Palangkaraya, Indonesia*
Jl. RTA Milono Km 1,5 Palangka Raya
email: *haryadi@umpr.ac.id*

ABSTRACT

In this study we will characterize a matrix that maps the space of the Orlicz sequence space to the space of the bounded sequence and the convergence sequence. This study is carried out by generalizing the matrix mapping on ℓ_p space, $1 \leq p < \infty$, to the Orlicz sequence space. This results establish a necessary and sufficient condition for a matrix that maps the Orlicz sequence space to the bounded sequence space, convergence to 0 sequence space and the convergence sequence space.

Keywords: Matrix, sequence space, Orlicz function.

ABSTRAK

Dalam penelitian ini akan ditelaah kondisi matriks yang memetakan ruang barisan Orlicz ke ruang barisan terbatas dan ruang barisan konvergen. Penelitian ini dikerjakan dengan cara memperumum matriks pemetaan pada ruang ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ke ruang barisan Orlicz. Penelitian ini menghasilkan syarat perlu dan cukup matriks yang memetakan ruang barisan Orlicz ke ruang barisan terbatas, ruang barisan konvegen ke 0 dan ruang barisan konvergen.

Kata kunci: *Matriks, ruang barisan, fungsi Orlicz.*

Received: 18 Oktober 2022, Accepted: 17 November 2022, Published: 1 Desember 2022

PENDAHULUAN

Himpunan semua barisan bernilai real dituliskan ω. Anggota ω dituliskan dengan $x = (x_k)$ atau $(x_k)_{k=1}^{\infty}$. Diberikan X dan Y himpunan bagian tak kosong ω dan matriks tak hingga dengan entri bilangan real $A = (a_{nk}), n = 1,2,\cdots, k = 1,2,\cdots$. Matriks A dikatakan memetakan X ke Y, dituliskan $A \in (X,Y)$, jika $Ax \in Y$ untuk setiap barisan $x = (x_k) \in X$. Dengan demikian $A \in (X,Y)$ berarti untuk setiap $x = (x_k) \in X$,

(i) $A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k$ konvergen untuk setiap n, dan

(ii) $(A_n x) \in Y$.

Penelitian yang terkait dengan pemetaan matriks pada ruang barisan telah banyak dilakukan oleh para peneliti. Penelitian mengenai matriks transformasi di ruang barisan bernilai vektor dibahas oleh (Arunphalungsati & Wijanto, 2004), (V.

Khan, 2011) dan (Alotaibi et al., 2014). Sementara itu studi mengenai karakterisasi operator matriks pada ruang barisan terbobot dibahas oleh (Malkowsky & Savas, 2004). Studi tentang kondisi matriks yang memetakan ruang barisan Cesaro diperumum ke ruang barisan terbatas diantaranya telah dilakukan oleh (F. M. Khan & Khan, 1994) dan (Rahman & Karim, 2016). Di dalam (Malkowsky & Rakocevic, 2001) ditelaah syarat perlu dan cukup matriks tak hingga yang memetakan ruang bagian ω ke ruang bagian ω lainnya. Dalam menelaah pemetaan matriks dengan banyaknya entri tak hingga, kekonvergenan deret $A_n x$ memiliki peranan penting. Pembahasan mengenai kekonvergenan deret tersebut membawa pada pembahasan mengenai dual Kothe-Toeplitz. Dual Kothe-Toeplitz pada ruang barisan diantaranya ditelaah di dalam (Yilmaz & Ozdemir, 2005), (Malkowsky & Velickovic, 2012), (Yilmaz, 2013) dan (Kuldip et al., 2019). Hasil-hasil penelitian selanjutnya mengenai matriks transformasi pada ruang barisan antara lain dibahas di dalam (Sonmez, 2020).

Diberikan fungsi Orlicz ϕ dan himpunan-himpunan bagian ω sebagai berikut:

$$\ell_\phi = \left\{(x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty\right\}$$

$$\ell_\infty = \left\{(x_k) \in \omega : \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$

$$c_0 = \left\{(x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$$

$$c = \left\{(x_k) \in \omega : \lim_{k\to\infty} x_k = l \text{ untuk suatu bilangan } l\right\}.$$

Dalam makalah ini akan diteliti syarat perlu dan cukup matriks A yang memetakan ℓ_ϕ ke ℓ_∞, c_0 dan c.

TINJAUAN PUSTAKA

Fungsi Orlicz adalah fungsi $\phi: \mathbb{R} \to [0,\infty)$, dimana $\phi(t) = \phi(-t)$, kontinu, konveks, $\phi(t) = 0$ jika dan hanya jika $t = 0$ dan $\phi(t) \to \infty$ jika $t \to \infty$. Untuk setiap fungsi Orlicz ϕ terdapat fungsi dengan p dengan sifat tidak turun, kontinu kanan dan $\phi(t) = \int_0^t p(u)du$. Untuk sebarang fungsi Orlicz ϕ, fungsi ψ dengan $\psi(s) = sup\,\{|s|t - \phi(t): t \geq 0\}$ merupakan fungsi Orlicz, selanjutnya ψ dinamakan fungsi Orlicz komplementer ϕ. Dengan demikian ada fungsi tidak naik dan kontinu kanan q sehingga $\psi(s) = \int_0^s q(u)du$. Jika ψ fungsi Orlicz komplementer ϕ maka berlaku ketaksamaan Young $|ts| \leq \phi(t) + \psi(s)$ untuk setiap $t, s \in \mathbb{R}$. Untuk $s = p(|t|)sgn(t)$ atau $t = q(|s|)sgn(s)$, ketaksamaan Young menjadi kesamaan (Rao & Ren, 2002).

Suatu fungsi Orlicz ϕ dikatakan memenuhi kondisi-Δ_2 jika terdapat bilangan $t_0 \geq 0$ konstanta K sehingga $\phi(2t) \leq K\phi(t)$ untuk setiap $t \geq t_0$. Jika fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2 maka ℓ_ϕ merupakan ruang linear, yang selanjutnya dinamakan ruang barisan Orlicz. Khusunya fungsi Orlicz $|\cdot|^p$ dengan $1 \leq p < \infty$ memenuhi kondisi-Δ_2 dan ruang barisan Orlicznya adalah $\{(x_k): \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$.

Untuk fungsi Orlicz ϕ, notasi ρ_ϕ menyatakan fungsi pada ω dengan $\rho_\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k)$ untuk setiap $x = (x_k) \in \omega$. Demikian pula $\rho_\psi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k)$, $y = (y_k) \in \omega$. Di dalam ruang Orlicz dapat didefinisikan beberapa jenis norma. Pembahasan mengenai norma dan dua teorema berikut didiskusikan di dalam (Haryadi & Nurnugroho, 2022). Diberikan pasangan komplementer fungsi Orlicz ϕ dan ψ. Fungsi $\|\cdot\|_\phi : \ell_\phi \to [0, \infty)$ didefinisikan

$$\|x\|_\phi = \sup_{\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right|$$

merupakan norma dan dinamakan norma-ϕ. Norma tersebut berkaitan erat dengan fungsi ρ_ϕ.

Teorema 1. (Haryadi & Nurnugroho, 2022) Diberikan fungsi Orlicz ϕ. Jika $\|x\|_\phi \leq 1$, maka $\rho_\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) \leq \|x\|_\phi$.

Selain norma-ϕ di dalam ruang barisan Orlicz juga bisa digunakan norma Luxemburg. Kedua norma tersebut ekuivalen. Dengan menggunakan norma Luxemburg, (Khusnussa'adah & Supama, 2019) menyimpulkan bahwa ruang barisan Orlicz merupakan ruang lengkap.

Selanjutnya teorema berikut akan berperan dalam mempelajari kondisi matriks pemetaan di ruang barisan Orlicz pada pembahasan artikel ini selanjutnya.

Teorema 2. (Haryadi & Nurnugroho, 2022) Diketahui fungsi Orlicz ϕ memenuhi kondisi-Δ_2. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen untuk setiap $(x_k) \in \ell_\phi$ jika dan hanya jika $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(y_k) < \infty$ dimana ψ fungsi Orlicz komplementer ϕ.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan kajian teoritis yang memanfaatkan hasil-hasil yang telah ada. Diberikan ruang Orlicz ℓ_ϕ dan ruang barisan c_0, c dan ℓ_∞. Pertama-tama akan dicari kondisi pada matriks A sehingga $A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ konvergen untuk setiap n dan $x \in \ell_\phi$. Selanjutnya akan dicari kondisi matriks A sehingga barisan $(A_n x) \in Y$ dengan $Y \in \{c_0, c, \ell_\infty\}$, dimana c_0, c dan ℓ_∞ berturut-turut menyatakan ruang barisan konvergen ke 0, ruang barisan konvergen dan ruang barisan terbatas. Mengingat ℓ_ϕ merupakan generalisasi ℓ_p, penelitian dikerjakan dengan membandingkan kondisi matriks yang memetakan ruang ℓ_p ke ruang barisan terbatas seperti yang diuraikan di dalam (Malkowsky & Rakocević, 2000).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini akan didiskusikan mengenai kondisi matriks A sehingga $A \in (\ell_\phi, \ell_\infty)$. Hasil ini kemudian akan digunakan untuk mencari kondisi matriks $A \in (\ell_\phi, c_0)$ dan $A \in (\ell_\phi, c)$. Untuk pembahasan selanjutnya, fungsi Orlicz ϕ diasumsikan memenuhi kondisi-Δ_2.

Teorema 3. Matriks $A \in (\ell_\phi, \ell_\infty)$ jika dan hanya jika $\sup\limits_n \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) < \infty$.

Bukti: (Syarat perlu) Diambil barisan $x \in \ell_\phi$ dengan $\rho_\phi(x) \leq 1$. Karena $Ax \in \ell_\infty$ maka terdapat bilangan $M > 0$ sehingga $|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k| < M$ untuk setiap n. Akibatnya untuk setiap n,

$$\left\| \frac{(a_{nk})_{k=1}^{\infty}}{M} \right\|_\psi = \sup_{\rho_\phi(x) \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{M} x_k \right| < 1.$$

Oleh karena itu berdasarkan Teorema 1, $\rho_\psi\left(\frac{(a_{nk})_{k=1}^{\infty}}{M}\right) \leq \left\|\frac{(a_{nk})_{k=1}^{\infty}}{M}\right\|_\psi$, sehingga berakibat $\rho_\psi\left(\frac{(a_{nk})_{k=1}^{\infty}}{M}\right) < 1$ untuk setiap $n \geq N$. Karena fungsi ϕ memenuhi kondisi-Δ_2, maka terdapat bilangan $K > 0$ dan bilangan asli m_o sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) = \rho_\psi\left(\frac{M(a_{nk})_{k=1}^{\infty}}{M}\right) \leq K^{m_0} \rho_\psi\left(\frac{(a_{nk})_{k=1}^{\infty}}{M}\right) \leq K^{m_0}.$$

Dengan demikian $\sup\limits_n (\sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk})) < \infty$.

(Syarat cukup) Diambil sebarang barisan $x = (x_k) \in \ell_\phi$ dan sebarang bilangan asli n. Berdasarkan Ketaksamaan Young,

$$|A_n x| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty \tag{1}$$

Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ konvergen mutlak sehingga berakibat deret tersebut konvergen. Selajutnya, karena $\sup\limits_n \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) < \infty$, maka dari ketaksamaan (1) diperoleh $\sup\limits_n |A_n x| < \infty$, yang berarti $(A_n x) \in \ell_\infty$. ■

Selanjutnya untuk menelaah syarat perlu dan cukup sehingga $A \in (\ell_{\phi}, c_0)$, terlebih dahulu akan disampaikan lemma berikut.

Lemma 4. Jika $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ konvergen seragam dalam n.

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ konvergen seragam dalam n berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli s_0 dan bilangan α sehingga $|\sum_{k=1}^{s} |a_{nk}x_k| - \alpha| < \varepsilon$ untuk setiap $s \geq s_0$ dan untuk setiap n.

Bukti Lemma 4: Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x_k| < \infty$ maka untuk setiap bilangan asli k, $M_k = \sup_n |a_{nk}x_k| < \infty, M \geq 0$. Dengan demikian terdapat bilangan asli $n(k)$ sehingga $M_k < |a_{n(k)k}x_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Akibatnya

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_{n(k)k}x_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \leq \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x_k| + 1 < \infty,$$

yaitu $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergen. Karena untuk setiap k, $|a_{nk}x_k| \leq M_k$ maka berdasarkan Teorema Weierstrass, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ konvergen seragam dalam n.■

Teorema 5. Matriks $A \in (\ell_{\phi}, c_0)$ jika dan hanya jika

(i) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$;
(ii) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) < \infty$.

Bukti: (Syarat perlu) Diketahui $A = (a_{nk}) \in (\ell_{\phi}, c_0)$. Barisan $e^{(m)} = (x_k)$ dengan $x_k = 1$ jika $m = k$ dan $x_k = 0$ untuk $m \neq k$ merupakan anggota ℓ_{ϕ}. Oleh karena itu $\left(A_n e^{(m)}\right) \in c_0$. Karena untuk setiap n, $A_n e^{(m)} = a_{nk}$ berarti $a_{nk} \to 0$ jika $n \to \infty$, yakni syarat perlu (i) terbukti. Untuk syarat perlu (ii), diambil barisan $x \in \ell_{\phi}$ dengan $\rho_{\phi}(x) \leq 1$. Karena $Ax \in c_0$ maka ada N sehingga $|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k| < 1$ jika $n \geq N$. Akibatnya

$$\|(a_{nk})_{k=1}^{\infty}\|_{\psi} = \sup_{\rho_{\phi}(x)\leq 1} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right| < 1, \quad n \geq N.$$

Oleh karena itu $\rho_{\psi}((a_{nk})_{k=1}^{\infty}) \leq \|(a_{nk})_{k=1}^{\infty}\|_{\psi}$, sehingga berakibat $\rho_{\psi}((a_{nk})_{k=1}^{\infty}) < 1$ untuk setiap $n \geq N$. Oleh karena itu

$$\sup_n \rho_{\psi}((a_{nk})_{k=1}^{\infty}) \leq \max\{1, \rho_{\psi}(a_{nk}) : n = 1,2, \cdots N-1\} < \infty.$$

Dengan demikian syarat perlu (ii) terpenuhi.

(Syarat cukup). Diambil sebarang barisan $x \in \ell_\phi$. Berdasarkan (ii) dan Ketaksamaan Young,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty.$$

Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ konvergen mutlak dan berakibat deret tersebut konvergen untuk setiap n. Berdasarkan (ii) dan Lemma 4, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ konvergen seragam dalam n. Oleh karena itu dengan menggunakan (i) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} A_n\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk} x_k = 0$$

yakni $Ax \in c_0$. ■

Teorema 5 menjelaskan bahwa matriks tak hingga yang memetakan ruang barisan ℓ_ϕ ke ruang barisan c_0 memiliki ciri setiap baris matriks tersebut konvergen ke 0 dan setiap kolomnya merupakan anggota ℓ_ψ dengan ψ fungsi Orlicz komplenter ϕ.

Dengan memanfaatkan hubungan inklusi $c \subseteq \ell_\infty$, setiap matriks yang memetakan ℓ_ϕ ke c tentu memetakan ℓ_ϕ ke ℓ_∞. Dengan demikian Teorema 3 dapat dimanfaatkan dalam pembuktian Teorema 6 berikut.

Teorema 6. Matriks $A \in (\ell_\phi, c)$ jika dan hanya jika

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$;
(ii) $\sup\limits_{n} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) < \infty$.

Bukti: (Syarat perlu) Diambil barisan $e^{(m)} \in \ell_\phi$ seperti dalam bukti syarat perlau (i) Teorema 5. Akibatnya $Ae^{(m)} \in c$. Karena $Ae^{(m)} = (A_n e^{(m)}) = (a_{nk})_{n=1}^{\infty}$ ini berarti ada a_k sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$, sehingga syarat perlu (i) terbukti.

Untuk syarat perlu (ii), karena $c \subset \ell_\infty$, maka $A \in \left(\ell_\phi, \ell_\infty\right)$ jika $A \in (\ell_\phi, c)$, sehingga berdasarkan Teorema 3, berlaku (ii).

(Syarat cukup) Karena $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(x_k) < \infty$, maka berdasarkan (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ konvergen mutlak, sehingga deret tersebut konvergen untuk setiap n. Selanjutnya dengan menuliskan kembali

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk} - a_k)x_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \tag{2}$$

Berdasarkan (i), suku pertama ruas kanan persamaan (2) konvergen ke 0 jika $n \to \infty$. Oleh karena itu barisan $(A_n x)$ konvergen ke $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa suku kedua ruas kanan persamaan (2) konvergen dengan terlebih dahulu ditunjukkan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_k) < \infty$. Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_k) = \infty$; jadi untuk setiap asli m terdapat bilangan asli $s(m)$ sehigga $\sum_{k=1}^{s(m)} \psi(a_k) > 2^m$. Karena ψ kontinu maka (i) berakibat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{s(m)} \psi(a_{nk}) = \sum_{k=1}^{s(m)} \lim_{n\to\infty} \psi(a_{nk}) = \sum_{k=1}^{s(m)} \psi(a_k) > 2^m$$

dan berakibat $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_{nk}) = \infty$, bertentangan dengan (ii). Jadi permisalan tersebut tidak benar; dengan demikian $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(a_k) < \infty$. Oleh karena itu berdasarkan Teorema 2, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konvergen dan limit pada ruas kiri persamaan (2) ada jika $n \to \infty$. Dengan demikian $(A_n x) \in c$. ■

Fungsi Orlicz ϕ dengan $\phi(t) = \frac{|t|^p}{p}$, $1 \le p < \infty$, memiliki pasangan komplementer ψ dengan $\psi(s) = \frac{|s|^q}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Berdasarkan Teorema 6, diperoleh hasil berikut.

Teoerema 7. Syarat perlu dan cukup sehingga matriks $A = (a_{nk})$ memetakan ruang barisan $\ell_p = \{(x_k): \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$ ke ruang barisan c adalah (i) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$ dan (ii) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^q < \infty$.

KESIMPULAN

Karakteristik matriks tak hingga yang memetakan ruang barisan Orlicz ke ruang barisan ℓ_∞, c dan c_0 merupakan perumuman matriks tranformasi dari ruang ℓ_p, $1 < p < \infty$ ke ruang barisan ℓ_∞, c dan c_0.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Universitas Muhammadiyah Palangkaraya yang telah memberikan penugasan untuk penerbitan hasil penelitian ini.

REFERENSI

Alotaibi, A., Malkowsky, E., & Mursaleen, M. (2014). Measure of Noncompactness for Compact Matrix Operators on some BK Spaces. *Filomat*, *28*(4), 1081–1086.

Arunphalungsati, O., & Wijanto, K. (2004). Matrix Transformation from Cesaro Vector-valued Sequence Space into Orlicz Sequence Space. *Thai J. Math.*, 23–39.

Haryadi, H., & Nurnugroho. (2022). Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Dualnya. *Limit: Journal of Mathematic and Its Applications*, *19*(1), 123–133.

Khan, F. M., & Khan, M. A. (1994). Matrix Transformations Between Cesaro Sequence Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, *25*(6641–645).

Khan, V. (2011). An Extenstion of Kuttner's Theorem. *Theory and Applications of Mathematics & Computer Sciece*, *1*(2), 7–15.

Khusnussa'adah, N., & Supama. (2019). Kelengkapan Ruang Barisan yang terdefinisi oleh Fungsi Orlicz. *Eksata: Jurnal Ilmu-Ilmu MIPA*, *19*(1), 1–14.

Kuldip, Raj, Renu, Anand, & Pandoh, S. (2019). Cesaro Orlicz Sequence Spaces and Their Kothe-Toeplitz Duals. *Math. J. Okayama Univ.*, *61*, 141–158.

Malkowsky, E., & Rakocevic, V. (2001). Measure of Noncompactness of Linear Operators Between Spaces of Sequence that are (N,q) Summable or Bounded. *Czecholovak Mathematical Journal*, *51*(126), 505–522.

Malkowsky, E., & Rakocević, V. (2000). *Sequence Space*. Matematički institut SANU.

Malkowsky, E., & Savas, E. (2004). Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means. *Applied Mathematics and Computation*, *147*(2), 333–345.

Malkowsky, E., & Velickovic, V. (2012). Some New Sequence Space, Their Duals and a Connection With Wuff's Crystal. *MATCH Communication in Mathical and in Computer Chemistry*, *76*(3), 508–607.

Rahman, M. F., & Karim, A. B. M. R. (2016). Dual Spaces of Generalized Cesaro Sequence Space and Related Matrix Mapping. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention (IJMSI)*, *4*(4), 44–50.

Rao, M. M., & Ren, Z. D. (2002). *Application of Orlicz Spaces*. Marcel Dekker.

Sonmez, A. (2020). Some Notes on the New Sequence Space b_p^(r,s) (D). *Gazi University Journal of Science*, *33*(2), 476–490.

Yilmaz, Y. (2013). Generalized Köthe-Toeplitz Duals of Some Vector-Valued Sequence Spaces. *International Journal of Analysis*, *2013*, 1–7.

Yilmaz, Y., & Ozdemir, M. K. (2005). Kothe-Toeplitz Duals of Some Vector-Valued Orlicz Sequence Space. *Soochow Journal of Mathematics*, *31*(3), 389–402.